

§ 13. Куб суммы и куб разности, сумма и разность кубов

Основные сведения

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2bc + 2ac + 2ad + 2bd + 2cd,$$

и, вообще, квадрат суммы нескольких выражений равен сумме квадратов этих выражений и всех удвоенных произведений этих выражений, взятых по два.

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \text{ т.е.}$$

куб суммы двух выражений равен кубу первого выражения, плюс утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, плюс куб второго выражения.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \text{ т.е.}$$

куб разности двух выражений равен кубу первого выражения, минус утроенное произведение квадрата первого выражения и второго, плюс утроенное произведение первого выражения и квадрата второго, минус куб второго выражения.

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2), \text{ т.е.}$$

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и их неполного квадрата разности.

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2), \text{ т.е.}$$

разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений и их неполного квадрата суммы.

Подготовительный вариант

1. Представьте в виде многочлена: а) $(x-y+3)^2$; б) $(2x+3y-2)^2$.
2. Упростите выражение $(3a-b)^3 - 3ab(a+3b)$.
3. Разложите на множители: а) $125+x^3$; б) $64-(2x-1)^3$.
4. Найдите значение выражения $a(a+2)(a-2) - (a-3)(a^2+3a+9)$, где $a = \frac{1}{4}$.
5. Докажите, что $2^9 + 5^3$ кратно 13.
6. Найдите значение выражения $\left(\frac{97^3 + 83^3}{180} - 97 \cdot 83 \right) : (35^2 - 28^2)$.
7. Решите уравнение: а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$; б) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = 0$.
8. Докажите, что выражение $4x^2 + 2y^2 - 4xy - 4x + 2y + 3$ принимает лишь положительные значения при любых значениях входящих в него переменных.